Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de 2000.

[2,5 puntos] Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{3} (x^2+5)e^{-x}\,dx$.

Solución

$\int_{-1}^{3} (x^2+5)e^{-x}\,dx$, es una integral por partes luego utilizaremos la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$

$I = \int (x^2+5)e^{-x}\,dx = (x^2+5)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,2x\,dx = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2\int x\,e^{-x}\,dx = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2\cdot I_1$

$u = x^2+5 \rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = e^{-x}\,dx \rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

$I_1 = \int x\,e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}\,dx \rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

Luego $I = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2\cdot I_1 = -(x^2+5)(e^{-x}) + 2\cdot(-xe^{-x} - e^{-x}) + K = -e^{-x}(x^2+2x+7) + K$.

$\int_{-1}^{3} (x^2+5)e^{-x}\,dx = [-e^{-x}(x^2+2x+7)\,]_{-1}^{3} = [(-e^{-3}(9+6+7)) - (-e^{1}(1-2+7))] = 6e - \dfrac{22}{e^3}$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de 2000.

Sea *f* la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

(a) [1 punto] Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de f..

(c) [0'5 puntos] Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

Solución

(a)

Como $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ si $x \neq 2$

$x \neq 2$ es una A.V. porque $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$. Análogamente $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

y = mx+n es una A.O. con $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2x} = 1$ y

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+2x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x}{x+2} = -2$, por tanto la A.O. es y = mx+n = x - 2

Como $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (x-2)) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 1000)

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x-2)) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 1000)

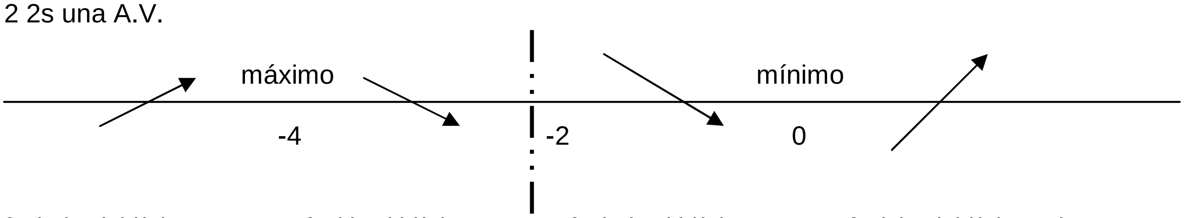
(b)

Realizamos el estudio de f ' (x) para ver el crecimiento y decrecimiento

$f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - x^2(1)}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow x(x+4) = 0$, de donde x = 0 y x = - 4 que serán los posibles máximos o mínimos. NO olvidemos que x = - 2 2s una A.V.



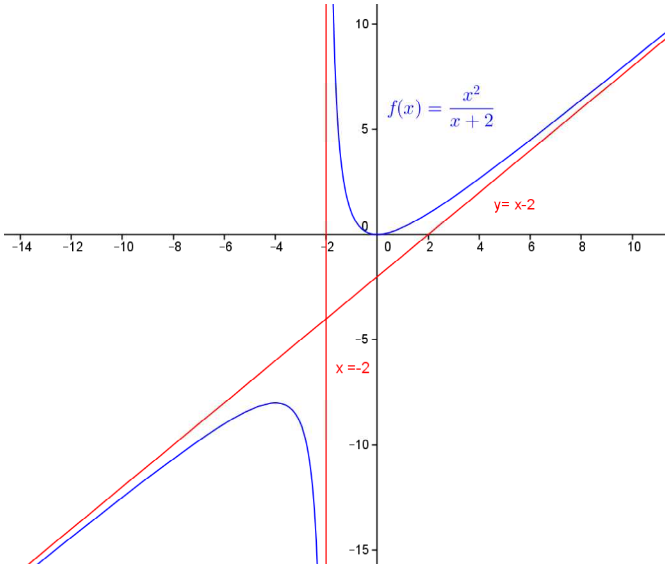
f ' (-5) =(+)/(+) >0 f ' (-) =(-)/(+) < 0 f ' (-1) =(-)/(+) < 0 f ' (1) =(+)/(+) >0 luego f(x) crece   f(x) decrece   f(x) decrece   f(x) crece

Por definición en x = -4 hay un máximo y vale f(-4) = - 8

Por definición en x = 0 hay un mínimo y vale f(0) =0

(b)

Su gráfica es



Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de λ: $\begin{cases} x+\lambda y+z = 0 \\ \lambda x+y+z = 0 \\ x+y+\lambda z = 0 \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} x+\lambda y+z = 0 \\ \lambda x+y+z = 0 \\ x+y+\lambda z = 0 \end{cases}$, como el sistema es homogéneo para que tenga solución distinta de la trivial su determinante ha de ser cero, es decir $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda^2)(\lambda-1) - (1-\lambda)^2 = -(1-\lambda)^2\cdot\lambda = 0$, de donde $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

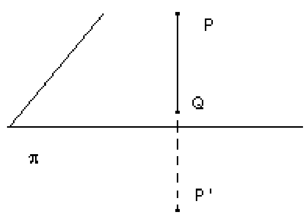
Si $\lambda = 0$, nos quedamos con solo dos ecuaciones. Elegimos las dos primeras $x + z = 0$; $y + z= 0$. Haciendo $z = \mu$, nos resulta $x = -\mu$ e $y = -\mu$. Solución $(x,y,z) = (-\mu, -\mu,\mu)$ con $\mu \in \Re$

Si $\lambda = 1$, nos quedamos con solo dos ecuaciones. Elegimos las dos primeras $x + y + z = 0$; $x + y + z= 0$. Como es la misma ecuación tenemos sólo una ecuación $x +y +z = 0$. Haciendo $y = \mu$ y $z = \rho$, nos resulta
$x = 1 - \mu - \rho$. Luego la solución es $(x,y,z) = (1 - \mu - \rho, \mu, \rho)$ con $\mu, \rho \in \Re$. Es doblemente indeterminado.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico del punto P(1,2,-2) respecto al plano de ecuación 3x+2y+z-7=0.

Solución



El simétrico del punto P respecto del plano π es el simétrico del punto P respecto del punto Q, siendo Q la proyección ortogonal de P sobre π (hay que calcular la recta r $\perp$ a π por el punto P, y después hallar la intersección de dicha recta con π)

r ≡ recta perpendicular a π por P, punto P(1,2,-2) y vector director el normal de π, **v=n**=(3,2,1)

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Q = r ∩ π

3(1+3λ) + 2(2+2λ) + (- 2+λ) – 7 = 0. Operando queda 14λ - 2 = 0, de donde λ = 1/7 y el punto es Q(1+3/7, 2+2/7, -2+1/7) = Q(10/7, 16/7, -13/7)

Q es el punto medio del segmento PP ’, siendo P ‘ el simétrico buscado luego

(10/7, 16/7, -13/7) = ((1+x)/2, (2+y)/2, (-2+z)/2) de donde 10/7 = (1+x)/2; 16/7 = (2+y)/2 y -13/7 =(-2+z)/2 y operando obtenemos x = -13/7, y = 18/7 y z = -19/7 es decir P ’(-13/7, 18/7, -19/7)

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de 2000.

Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 h. y las 6 h. De la tarde viene dada por $v(t) = t^3 – 15t^2 + 72t + 8$ para $t \in [2,6]$.

(a) [1’25 puntos] ¿A que hora circulan los coches con mayor velocidad? Justifica la respuesta.

(b) [1’25 puntos] ¿A que hora circulan los coches con menor velocidad? Justifica la respuesta.

Solución

2 h. y 6 h. ; la función es $v(t) = t^3 – 15t^2 + 72t + 8$ para $t \in [2,6]$.

(a)

v ‘(t) = $3t^2$-30t+72; v ‘(t) = 0; $3t^2$-30t+72 = 0. Resolviendo esta ecuación obtenemos t = 4 y t = 6, que serán los posibles extremos relativos. Para comprobarlo entramos en v ‘’ (x)

v ‘’ (x) = 6t – 30

Como v ‘’ (4) = 6(4) – 30 = - 6 < 0, t = 4 es un máximo relativo

Como v ‘’ (6) = 6(6) – 30 = 6 > 0, t = 6 es un mínimo relativo

Para ver los extremos absolutos tenemos que sustituir en v(t) los valores 4, 6 y también los extremos del intervalo 2 y 6. El valor mayor es el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.

v(2) = 8 –15(4)+72(2) + 8 = 100

v(4) = 64 –15(16)+72(4) + 8 = 120

v(6) = 216 –15(36)+72(6) + 8 = 116

La mayor velocidad se alcanza a las 4 de la tarde y es de 120 Km. Y la menor velocidad se alcanza a las 2 de la tarde y es de 100 Km.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de 2000.

Considera las funciones f, g : R → R definidas por $f(x) = 6 – x^2$, g(x) =|x|, x∈R

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g.

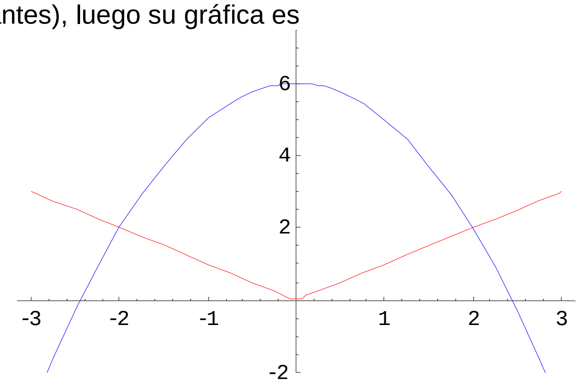
(b) [1’5 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a)

$$f(x) = 6 – x^2;\ \ g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \ge 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $6 – x^2$ es una parábola igual que $– x^2$ pero desplazada 6 unidades hacia arriba en ordenadas. “x” y “– x” son rectas (las bisectrices de los cuadrantes), luego su gráfica es



(b)

$$\text{Área} = \int_{-2}^{0} [(6 – x^2) – (-x)]dx + \int_{0}^{2} [(6 – x^2) – (x)]dx = \left[6x – x^3/3 + x^2/2\right]_{-2}^{0} + \left[6x – x^3/3 + x^2/2\right]_{0}^{2} =$$

= [(0) – (-12 + 8/3 + 2)] + [((12 - 8/3 - 2) – (0)] = 44/3 u.a.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

$A^2 \cdot X = 2B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ existe A^{-1}, por tanto podemos multiplicar dos veces por la izquierda por A^{-1} la ecuación $A^2 \cdot X = 2B$.

$A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^2 \cdot X = 2\, A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B$; es decir $X = 2\, A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$X = 2\, A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B = 2 \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 & 26 \\ 4 & -1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de 2000.

[2'5 puntos] Halla la ecuación del plano cuyo punto mas próximo al origen es (-1,2,1).

Solución

El plano cuyo punto más próximo al origen es el que pasa por el punto A(-1,2,1) y tiene por vector normal **n** = **OA** =(-1,2,1), es decir es el plano es **n•OA** = 0 = –1(x+1)+2(y-2)+1(z-1)=0, simplificando sale –x+2y+z-6=0 (•es el producto escalar. Tambien se puede hacer por planos paralelos)